الأعداد العقدية

complex number

النسخة رقم 1.00

إعداد فريق إحياء

1432 هـ

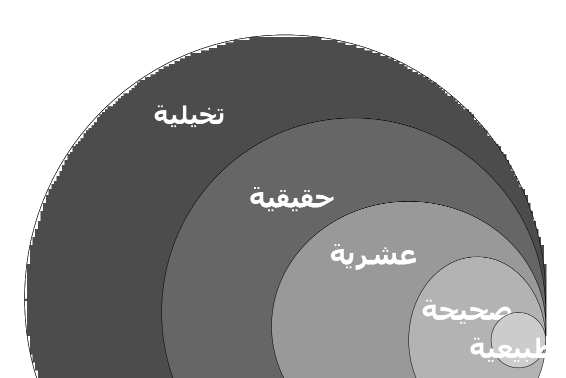


لطالما كان $\sqrt{-1}$ غير قابل للحل لدى علماء المدرسة العربية و الإغريقية للجبر في القرون الأولى و كان لهذا تبريره حيث كان قابلية الحل يتطلب أن يستطيعوا تمثيل هذا الجذر في الهندسة و هذا لم يكن ممكنا .
إن بذور الأرقام العقدية تم بذرها في القرن الثاني عشر عندما تم نقل الجبر العربي إلى إيطاليا عبر ترجمة لكتاب الجبر و المقابلة لمؤلفه العالم المسلم أبو بكر الخوارزمي و قد حصل بعدها قفزة قوية بعد أن عُثر في مخطوطين مجهولين قانون لتحويل أي معادلة من الدرجة الثالثة إلى الشكل $x^3+qx=p$ و في القرن السادس عشر أوجد *Scipione del Ferro* حلاً لهذه المعادلة و كان من الشكل $x=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{q/2-\sqrt{\Delta}}$, $\Delta=q^2/4+p^3/27$ وعند تطبيق هذه القوانين لبعض المعادلات تظهر جذور لأعداد سالبة و من هنا انطلق التفكير بالأعداد التخيلية.
لذلك توجد مسائل لا يمكن حلها في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ فمثلاً المعادلة $x^2+1=0$ لا تحل في $\mathbb{R}$ لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه 1- .
لذلك نرمز لـ $i=\sqrt{-1}$ عندئذ يمكننا التعبير عن حل المعادلة بالشكل $x=\mp i$.
و هكذا ظهرت الحاجة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة جديدة بحيث تكون كل المعادلات الجبرية قابلة للحل . تسمى بمجموعة الأعداد العقدية و نرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$.

العدد العقدي :

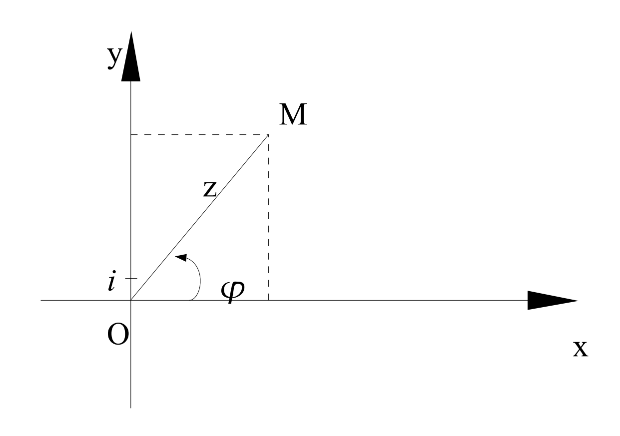
هو العدد $z=x+iy$ ، حيث x و y أعداد حقيقية و i تخيلي يحقق $i^2=-1$.
و لما كان كل عدد حقيقي هو عدد تخيلي قسمه التخيلي معدوم فإن :

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$



تمثيل العدد العقدي هندسياً:

يمثل هندسياً بنقطة على المستوي الديكارتي إحداثياها x و y و نسمي عندئذٍ المستوي الديكارتي بالمستوي العقدي و محور السينات المحور الحقيقي و محور العينات هو المحور التخيلي .



و بالتالي :

$$Z=x+iy=(x,0)+(0,y),$$
$$i=(0,1)$$

مرافق العدد العقدي:

$Z=x+iy\Rightarrow\overline{Z}=x-iy$. وهو توزيعي على الضرب و الجمع و الطرح و القسمة .

طويلة العدد العقدي :

نسمي المسافة بين النقطة $M(x,y)$ و نقطة الأصل o طويلة العدد العقدي و نرمز لها بالرمز $|z|$:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{Z\,\overline{Z}}$$

زاوية العدد العقدي :

هي الزاوية المحصورة بين الاتجاه الموجب لـ ox و oM و تعرف بالزاوية φ

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad , \qquad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

العمليات على الأعداد العقدية:

الجمع :

يتم بجمع القسم الحقيقي مع القسم الحقيقي و القسم التخيلي مع القسم التخيلي :

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$$

الجداء :

$$Z_1.Z_2=\overbrace{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}^{\text{فك الأقواس}}=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$$

القسمة :

من الشكل : $\frac{z_1}{z_2}$ نظرب بالمرافق $\frac{Z_1\times\overline{Z_1}}{Z_2\times\overline{Z_1}}$ و بالتالي $z_1\times\overline{z_1}=(x-iy)(x+iy)=x^2+y^2$:

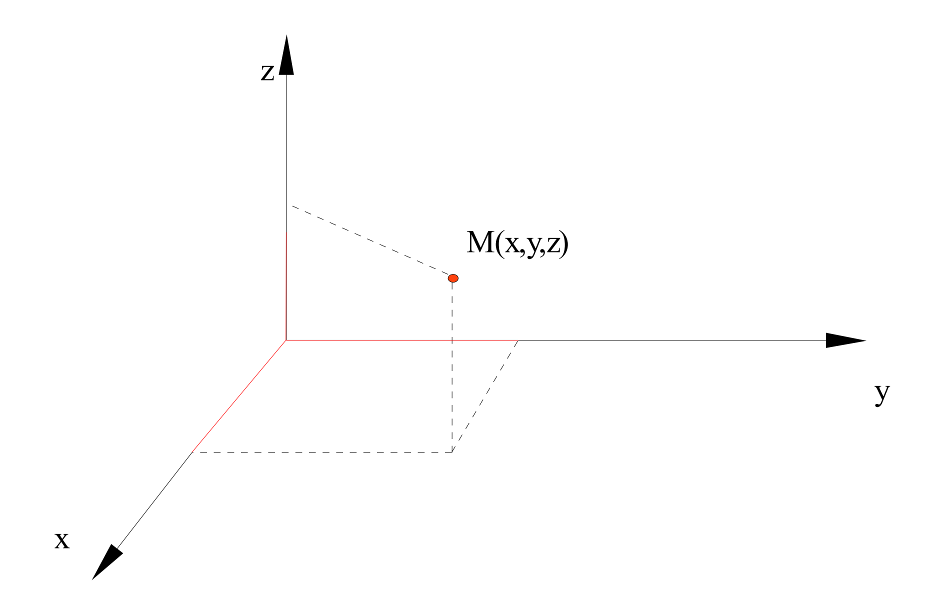
$$\frac{z_1\times\overline{z_1}}{z_2\times\overline{z_1}}=\frac{x^2+y^2}{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}$$

االشكل القطبي لعدد العقدي :

لا بد لنا أن نتعرف على أنواع الإحداثيات قبل الخوض في هذا التحويل :

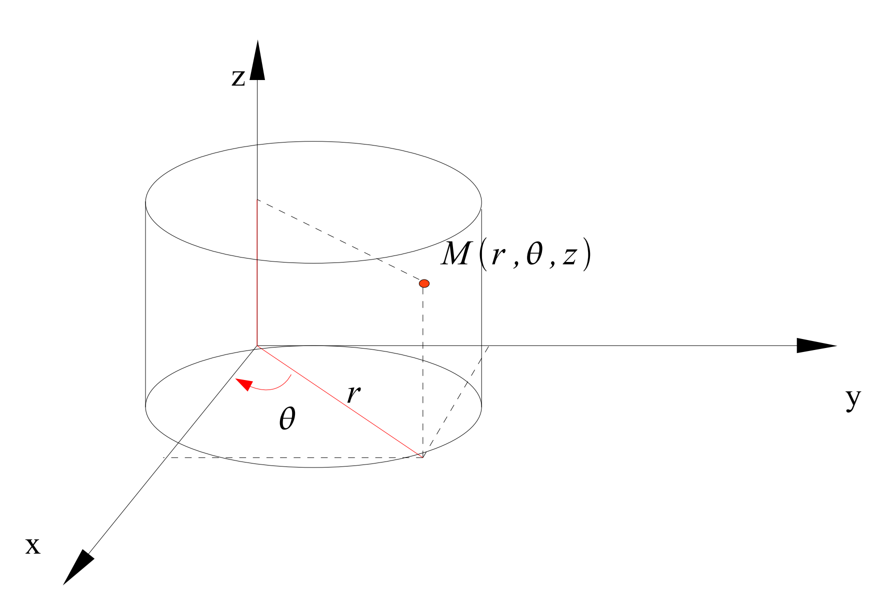
الإحداثيات الديكارتية :

سوف نستخدمها دون البعد الثالث z



الإحداثيات الأسطوانية(القطبية) :

نسخدمها دون البعد الثالث z

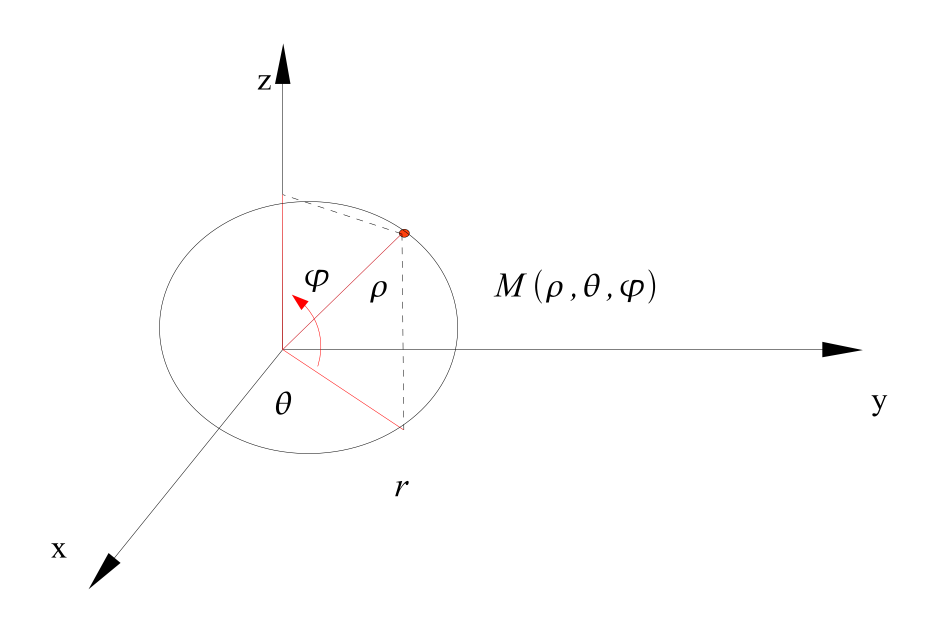


القاعدة

$$x = r \cos\theta$$
$$y = r \sin\theta$$
$$z = z$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

الإحداثيات الكروية :

مع أننا لن نستخدمها لكن من الأفضل التعرف عليها .



القاعدة

$$z=\rho\cos\varphi$$
$$r=\rho\sin\varphi$$
$$\theta=\theta$$
$$\rho=\sqrt{r^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$$

نعود الآن للتحويل لقطبي لعدد العقدي ، حيث نستخدم في هذا التحويل من الإحداثيات القطبية

$$x=r\ \cos\theta$$
$$y=r\ \sin\theta$$

و بالتالي :

$$z=r\ \cos\theta+i\,r\ \sin\theta$$
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

و يمكن إثبات أن:

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

و يمكن الحصول على جذور العدد العقدي و فق القانون :

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n})$$

و عدد الجذر هنا n جذر حيث :

$$k=0,1,2,.....,n-1$$

الشكل الأسي للعدد العقدي :

حسب علاقة أولر فإن الشكل الأسي هو :

$$z=r.e^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

البرهان :

حسب نشر ماكلوران $$e^{x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^{n}}{n!}\Rightarrow e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(i\theta)^{n}}{n!}$$

و لنعوض بعض من قيم n :

$$n=0\Rightarrow=1$$
$$n=1\Rightarrow=i\theta$$
$$n=2\Rightarrow=\frac{\theta^{2}}{2!}$$
$$n=3\Rightarrow=-i\frac{\theta^{3}}{3!}$$
$$\vdots$$
$$+$$
$$(1+\theta+\frac{\theta^{2}}{2!}+\cdots)+i(\theta-\frac{\theta^{3}}{3!}+\cdots)$$

و نلاحظ أن هذه متتاليتين أحدهما تمثل منشور ماكلوران للـ cos و الثانية للـ sin أي أن :

$$Z=x+iy=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

- و خواص التوابع الأسية مثلاً :

$$e^{i(\theta+2\pi)}=e^{i(\theta)}$$
$$1/e^{i(\theta+2\pi)}=e^{-i(\theta)}$$
$$e^{i\theta}=e^{i(\theta)}$$
$$e^{i\theta_{1}}.e^{i\theta_{2}}=e^{i(\theta_{2}+\theta_{2})}$$
$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta}=i\,e^{i\theta}$$

خواص القيمة المطلقة للأعداد العقدية[1] :

- $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2|$

البرهان :

$$|Z_1 . Z_2| = \sqrt{Z_1 . Z_2 . (\overline{Z_1 . Z_2})}$$
$$= \sqrt{Z_1 . \overline{Z}_1 Z_2 \overline{Z}_2} = |Z_1| . |Z_2|$$

- $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

البرهان :

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} . (\frac{\overline{Z_1}}{Z_2})}$$
$$= \sqrt{\frac{Z_1 . \overline{Z_1}}{Z_2 \overline{Z_2}}} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

- $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

البرهان :

$$|Z_1 + Z_2| =^? \sqrt{(Z_1 + Z_2) . \overline{(Z_1 + Z_2)}}$$
$$=^? \sqrt{Z_1 . \overline{Z}_1 + Z_1 . \overline{Z}_2 + Z_2 \overline{Z}_1 + Z_2 . \overline{Z}_2}$$
$$=^? \sqrt{Z_1 . \overline{Z}_1 + \underbrace{Z_1 . \overline{Z}_2 + (\overline{Z_1 \overline{Z}_2})}_{2Re(Z_1 . \overline{Z}_2)} + Z_2 . \overline{Z}_2}$$
$$\le |Z_1| + |Z_2|$$

الدائرة في المستوي العقدي :

إن الشكل العام لمعادلة الدائرة في المستوي العقدي هي :

---

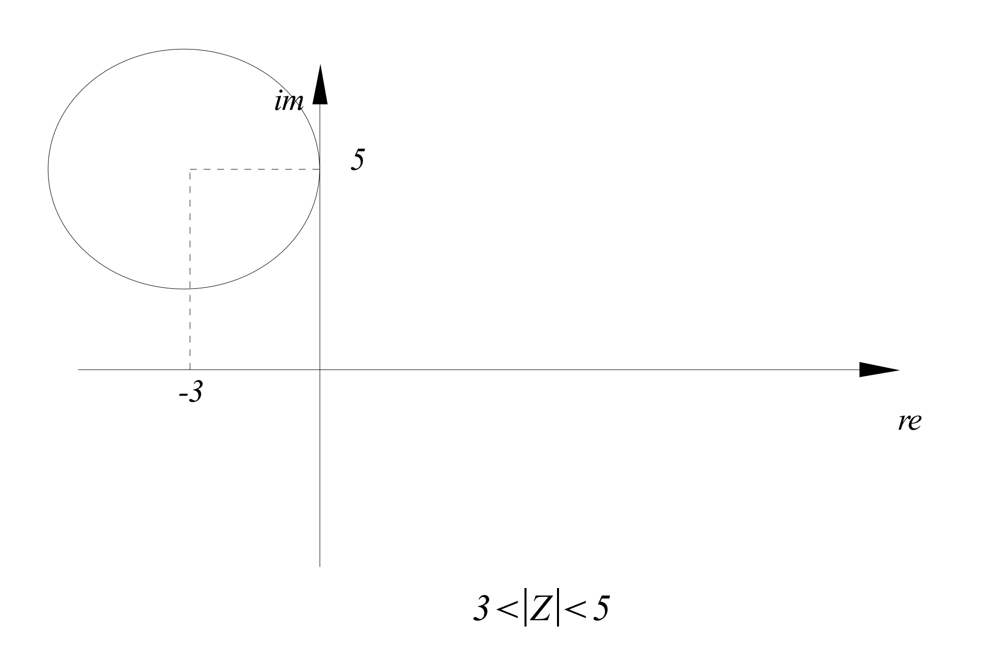
1 إن البراهين التالية تعتمد على:

- خاصية توزيع المرافع على العمليات الأساسية.
- $Z + \overline{Z} = x + iy + x - iy = 2re(z)$

$$|Z - Z_0| = r$$
$$Z - Z_0 = r\,e^{i\theta}$$

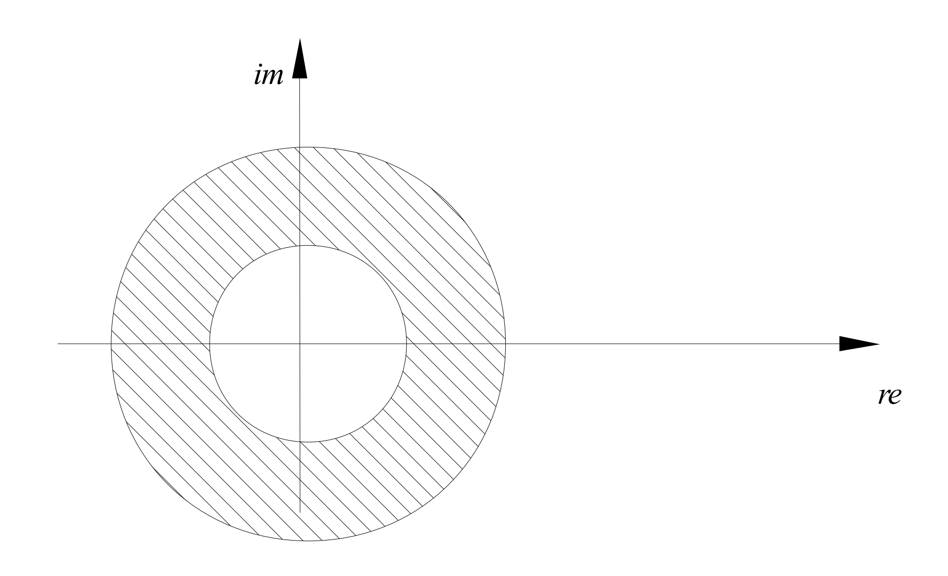
<u>مثال(1) :</u>

$$|Z + 3 - 5i| = 3$$
$$|Z - (-3 + 5i)| = 3$$



<u>مثال(2) :</u>

$$3 < |Z| < 5$$



ملاحظة:

يمكننا أن نستنتج من شكل أولر التالي :

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

و يمكننا ان نستنتج و بالمقارنة مع شكل التوابع القطعية أن :

$$\cos i\theta=\frac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{2}=ch\theta$$
$$\sin i\theta=\frac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{2i}=-ish\theta$$

التوابع العقدية :

عندما توجد علاقة تربط بين مجموعتين بحيث يكون للمستقر صورة واحدة لكل عنصر من عناصرها تدعى هذه العلاقة بالعلاقة التابعية و الشكل العام للتوابع العقدية :

$$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$$

أمثلة

- $f(x,y)=(x+y)+i(2xy)$
- $f(x,y)=Z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$
- $f(x,y)=\sin Z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy$
  $=\sin x\, ch\, y-i\cos x\, sh\, y$
- $f(x,y)=Z^2=e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$

النهاية في العقدية:

إن النهاية في مجموعة الأعداد العقدية لا تختلف كثيراً عن مفهوم النهاية في مجموعة الأعداد الحقيقية .

أمثلة

- $$\lim_{Z\to -2i}\frac{Z^2+4}{Z+2i}=$$
  $$\lim_{Z\to 2i}\frac{(Z-2i)(Z+2i)}{Z+2i}=-4i$$

نهايات شهيرة :

- $$\lim_{Z\to 0}(1+Z)^{1/Z}=e$$
  $$\lim_{z\to 0}\frac{\sin Z}{Z}=1$$

تمرين محلول :

- $$\lim_{Z\to 0}\left(\frac{Z+2}{Z+3}\right)^Z$$
  $$\left(\frac{Z+2+1-1}{Z+3}\right)^Z=\left(1+\frac{-1}{Z+3}\right)^Z\Rightarrow\frac{-1}{Z+3}=\frac{1}{w}$$
  $$Z=w-3$$

و الآن نعوض في النهاية :

- $$\lim_{w\to 0}(1+w)^{w-3}=$$
  $$\lim_{w\to 0}(1+w)^w.\lim_{w\to 0}(1+w)^{-3}=e.1=e$$

الاتصال (الاستمرار)

بفرض لدينا دالة معرفة f على منطقة ما ضمن C فإن التابع يكون مستمراً على هذه المنطقة إذا حققت كل نقطة Z_0 تنتطمي لتلك المنطقة ما يلي :

$$\lim_{Z\to Z_0}f(Z)=f(Z_0)$$

مثال

عيّن k بحيث تكون الدالة التالية مستمرة(متصلة) عند الصفر :

$$f(z)=\begin{cases}Z^2-i: & Z=0\\ \frac{\sin KZ}{Z}: & Z\neq 0\end{cases}$$

$$f(0)=-i$$
$$\lim_{Z\to 0}\frac{\sin KZ}{Z}=\lim_{Z\to 0}K\quad\frac{\sin KZ}{KZ}\Rightarrow K=-i$$

الاشتقاق

لكي تكون الدالة مشتقة عند نقطة معينة يجب أن تكون متصلة عندها و يجب أن تكون النهاية التالية موجودة :

$$f'(Z_0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(Z+\lambda)-f(Z)}{\lambda}$$

<u>مثال :</u>

أثبت أن مشتق Z^n هو $n\,Z^{n-1}$

من التعريف

$$f'(Z_0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(Z+\lambda)-f(Z)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{(Z+\lambda)^n-Z^n}{\lambda}$$

و حسب كرخ- نيوتن :

$$(Z+\lambda)^n=Z^n+nZ^{n-1}\lambda+n(n-1)Z^{n-2}\lambda^2+\ldots+\lambda^n$$

و بالتعويض

Γ_2

$$\oint_{\Gamma} f(Z)\,dZ=\oint_{\Gamma_1} f(Z)\,dZ+\oint_{\Gamma_2} f(Z)\,dZ$$

Γ

Γ

$$f'(Z_0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{Z^n+nZ^{n-1}\lambda+n(n-1)Z^{n-2}\lambda^2+\ldots+\lambda^n-Z^n}{\lambda}=nZ^{n-1}.$$

<u>التابع التحليلي Harmonic Functions</u>

إذا كان التابع $f(z)=w$ مشتقاً في كل نقطة من نقاط المجال G فإننا نقول أن التابع تحليلي في هذا النطاق .

معادلتي كوشي – ريمان :

التابع تحليلي ⟸ معادلتي كوشي و ريمان محققتان

وبالتالي نستنبط من هذه العلاقة أن التابع إذا كان تحليلياً فهذا يقتضي تحقق كوشي و ريمان .

و صيغة معادلتي كوشي و ريمان للتابع $f(Z)=u(x,y)+iv(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}$$

و بالإحداثيات القطبية :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

<u>التابع التحليلي و النقاط الشاذة</u>

يمكن لتابع أن يكون تابع تحليلي في منطقة ما دون أن يكون تحليلي في عدد من النقاط و التي تدعى **النقاط الشاذة** .

تكامل الخطي في المستوي العقدي:

ليكن لدينا منحني محدداً و موجهاً و صقيلاً جزئياً و ليكن التابع : $f(Z)=u(x,y)+iv(x,y)$ فإن التكامل الخطي العقدي على المنحني الذي سنسميه Γ هو :

$$\int_{\Gamma} f(Z)\,dz=\int_{\Gamma}\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)d\,(x+iy)=$$

$$\int_{\Gamma}\left(u\,dx+iu\,dy+iv\,dx-v\,dy\right)=\int_{\Gamma}\left(u\,dx-v\,dy\right)+i\int_{\Gamma}\left(u\,dy+v\,dx\right)$$

نظرية كوشي Cauchy's Theorem

تقول نظرية كوشي :

$$\oint_{\Gamma} f(Z)\,dZ=0$$

عندما تكون الدالة تحليلية في المنحني المحدد ضمن المسار Γ

الإثبات:

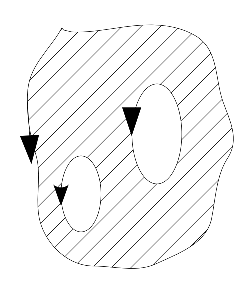
$$\oint_{\Gamma} f(Z)\,dZ=\int_{\Gamma}\left(u\,dx-v\,dy\right)+i\int_{\Gamma}\left(u\,dy+v\,dx\right)$$

و حسب نظرية غريين في التحويل بين التكامل الخطي و التكامل السطحي نجد:

$$\oint_{\Gamma} f(Z)\,dZ=\iint\left(-\frac{\partial u}{dy}-\frac{\partial v}{dx}\right)dA+i\iint\left(\frac{\partial u}{dx}-\frac{\partial v}{dy}\right)=0$$

و ذلك لأنه تحليلي و بالتالي معادلتي كوشي و ريمان محققتان .

نتيجة :

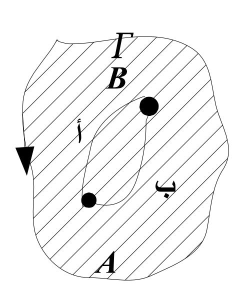


و ذلك طالما كان التابع تحليلياً في المنطقة المحصورة بين المنحنيات .

استقلال التابع التحليلي عن مسار المكاملة

بفرض لدينا تابع تحليلي في منطقة R و مسار المكاملة هو من A إلى B .
فإن التكامل عبر أي مسار مسلوك لا يختلف :

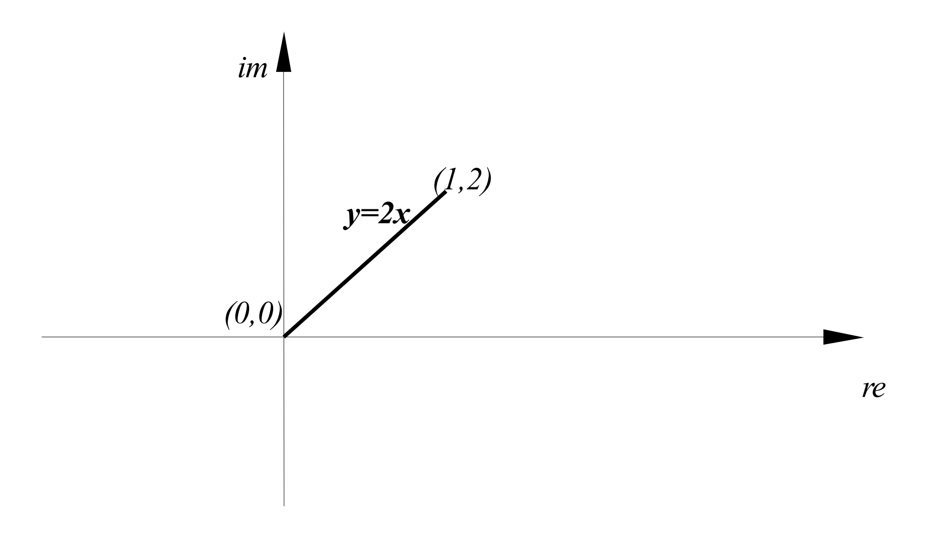
$$\oint_{أ} f(Z)\,dZ=\oint_{ب} f(Z)\,dZ=F(B)-F(A)$$



أمثلة

المثال(1) :

احسب قيمة التكامل $I=\int_{\Gamma} Z^3\,dZ$ حيث أن المسار هو المستقيم الواصل بين النقطة 0,0 و النقطة 1,2 .



كما نعلم أن

$$\int_{\Gamma} f(Z)\,dZ=\int_{\Gamma}(u\,dx-v\,dy)+i\int_{\Gamma}(u\,dy+v\,dx)$$

$$f(Z)=Z^3=(x+iy)^3=x^3-3xy^2+i(-y^3+3x^2y)=$$

$$\int f(Z)\,dZ=\int (x^3-3xy^2)dx-(-y^3+3x^2y)\,dy+i\int (x^3-3xy^2)\,dy+(-y^3+3x^2y)\,dx$$

و لدينا :

$dy=2dx\,;\,x:0\to 1\,,\,y:0\to 2$ و بالتعويض نجد :

$$\int f(Z)\,dZ=\int_0^1 (x^3-3xy^2)dx-2\int_0^2 (-y^3+3x^2y)\,dx+2i\int_0^1 (x^3-3xy^2)\,dx+\int_0^1 (-y^3+3x^2y)\,dx$$

$$\vdots$$

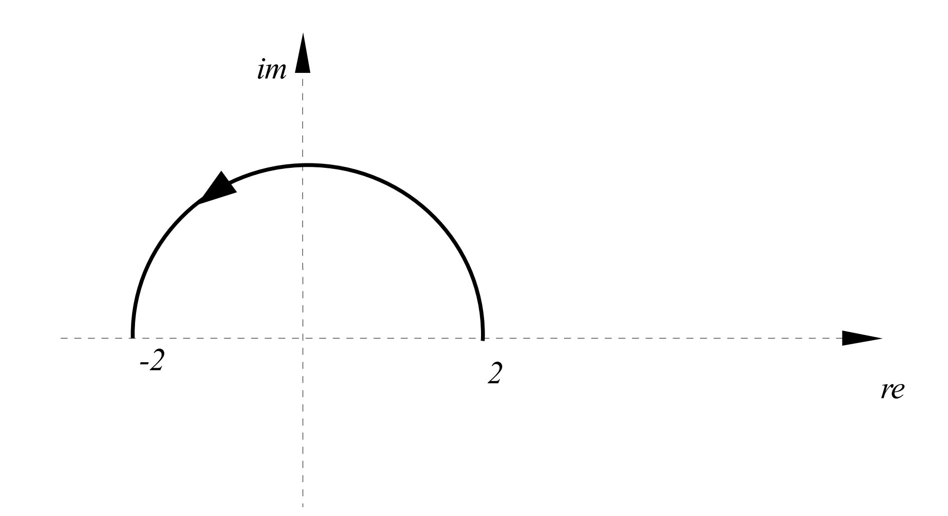
<u>مثال(2)</u>

احسب قيمة التكامل $I=\oint_{|Z|=1}\frac{Z\,dZ}{(Z-2)^4}$.

إن التابع تحليلي داخل هذا المنحني الأملس و بالتالي و بتطبيق نظرية كوشي نجد أن التكامل السابق قيمته تساوي الصفر .

<u>مثال(3)</u>

احسب قيمة التكامل $I=\int_{\Gamma}(Z+\frac{1}{Z})\,dZ$



$$Z=2e^{i\theta}\Rightarrow dZ=2i\,d\theta$$

$$I=2i\int_{0}^{\pi}(2e^{i\theta}+2^{-1}e^{-i\theta})\,d\theta$$

$\vdots$

نتيجة :

عندما تكون الدالة تحليلية فإن تكاملها لا يتعلق بالمسار المدروس و تكامل بشكل عادي .

صيغ كوشي التكاملية

إذا كانت لدينا دائرة بعكس اتجاه عقارب الساعة متمركزة عند Z_0 و كانت الدالة تحليلية في القرص الذي تحدده النقطة الحدية Z_0 و حدود الدائرة الخارجية فإن صيغ كوشي تعطى بالعلاقة التالية :

$$f(Z_0)=\int_{\Gamma}\frac{f(Z)}{Z-Z_0}\,dZ$$

$$f(Z_0)^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(Z)}{(Z-Z_0)^{n+1}}\,dZ$$

و تستخدم هذه الصيغ في حساب المشتقات عند Z_0 و لحساب أيضاً التكاملات و ذلك عند معرفة النقطة الحدية و قيمة مشتق الدالة عندها .

النقاط الشاذة Singularities:

تصنف النقاط الشاذة إلى ثلاث أنواع :

1. **نقاط شاذة قابلة للحذف**

و هي التي تتحقق عندها الشرط التالي و هو محدودية النهاية التالية :

$$\lim_{Z\to Z_0} f(Z)<\infty$$

2. **نقاط شاذة قطب (بسيط و مضاعف)**

- **قطب بسيط**

و هي التي تتحقق عندها الشرط التالي و هو محدودية النهاية التالية :

$$\lim_{Z\to Z_0}(Z-Z_0)\,f(Z)<\infty$$

- **قطب مضاعف(رتبة التضاعف من رتبة n)**

و هي التي تتحقق عندها الشرط التالي و هو محدودية النهاية التالية :

$$\lim_{Z\to Z_0}(Z-Z_0)^n\,f(Z)<\infty$$

3. **نقاط شاذة أساسية**

و هي النقطة التي لا تتحقق عندها أي من الشروط السابقة .

مثال

أوجد النقط الشاذة في الدالة التالية :

$$f(Z)=\frac{sin(Z-2)}{Z^3(Z-2)}$$

$$\lim_{Z\to 0} Z^3\frac{sin(Z-2)}{Z^3(Z-2)}=\frac{sin(-2)}{-2}<\infty$$

و بالتالي $Z=0$ قطب درجة ثالثة .

$$\lim_{Z\to 2}\frac{sin(Z-2)}{Z^3(Z-2)}=\frac{1}{8}<\infty$$

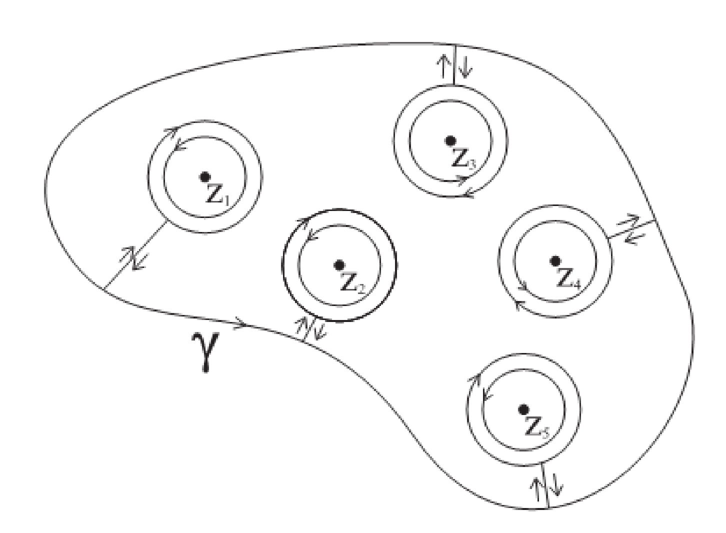
و بالتالي $Z=2$ نقطة شاذة قابلة للحذف .

نظرية الرواسب Residue Theorem:

تقول نظرية الرواسب :

إذا كان لدينا دالة تحليلية في منطقة G سوى نقاط شاذة معزولة و المسار مغلق و بسيط و مغلق و أملس عندها :

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}_{z=z_k}(f(z)) ,$$



حساب راسب الدالة :

- إذا كانت النقطة الشاذة قابلة للحذف فإن $res[f,Z_0]=0$
- إذا كانت النقطة الشاذة قطب بسيط فإن $res[f,Z_0]=\lim_{Z\to Z_0}(Z-Z_0)f(Z)$
- إذا كانت النقطة الشاذة قطب مضاعف فإن $res[f,Z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{Z\to Z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^n}(Z-Z_0)f(Z)$

مسؤولية الفريق

الفريق لا يتحمل أي تبعة من تبعات ورود أخطاء لأن الفريق في طور النشأة و كل ابن آدم خطّاء،و لا ينصح باستخدام إنتاجياته كمصادر تعليمية

في حال ورود خطأ:

يرجى التبليغ على بريد الفريق e7aaproj@gmail.com و لكم جزيل الشكر .

تحديثات:

سيتم بإذنه تعالى تحديث الكتاب كل فترة.

المصادر

- رياضيات 5 د.حسن سلوطه جامعة دمشق
- First cource in complex number
- محاضرات د. شكري أبو عرابي جامعة دمشق .